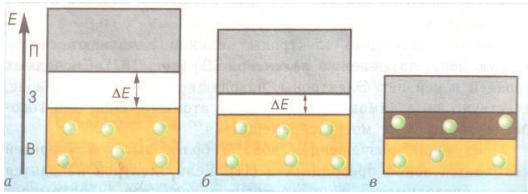


Тема 4. Зонная теория твёрдых тел

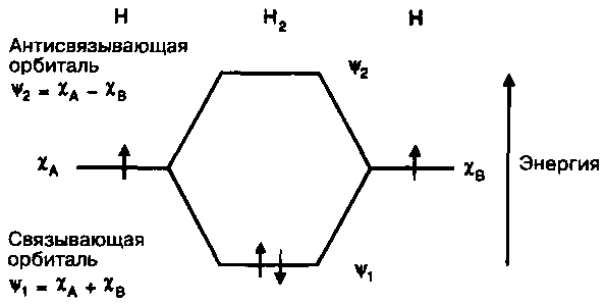
Содержание темы: Уровни в молекулах; Уровни в наночастицах; Зонный энергетический спектр электронов в кристалле (металлы, п/п, диэлектрики); Наклон энергетических зон; Длина волны Де-Бройля; Статистики Максвела-Больцмана, Бозе-Энштейна, Ферми-Дирака.

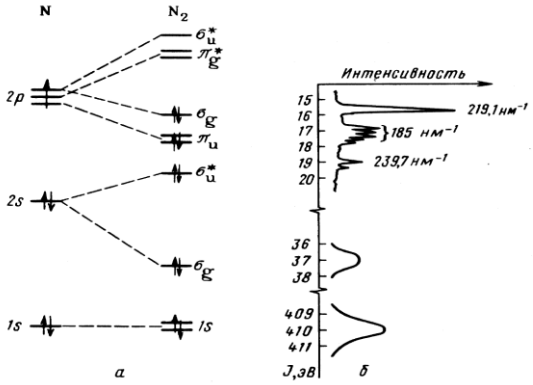
Молекулы

Химические связи которые образуют между собой атомы в молекулах имеют свою классификацию: ковалентные, ионные, металлические, водородные, Ван-дер-Ваальсовы. При этом происходит перекрытие электронных облаков соседних атомов, которое приводит к квантовому взаимодействию электронов и изменению их исходных энергетических уровней.

Существует 3 типа молекулярных орбиталей: связывающие, разрыхляющие и несвязывающие. Электроны на **связывающих** молекулярных орбиталях упрочняют связь, на **разрыхляющих** – дестабилизируют, **несвязывающие** – вообще не участвуют (типа внутренние оболочки). Молекула является устойчивой лишь в том случае, если число электронов на связывающих орбиталях превышает число электронов на разрыхляющих.

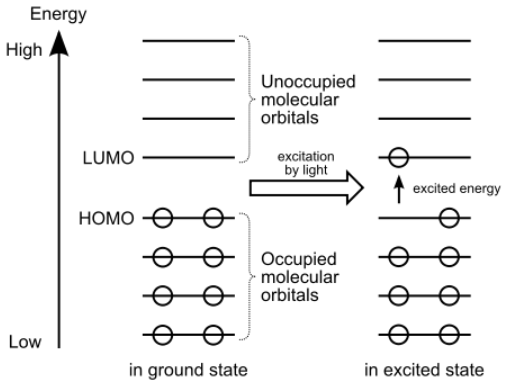
При образовании двухатомной молекулы H_2 из атомов H из s-орбиталей двух атомов H возникают две двухцентровые орбитали одна энергетически более выгодная (связывающая $\sigma_s^{св}$), другая менее выгодная (разрыхляющая $\sigma_s^{разр}$), чем исходные орбитали.





По аналогии с атомными s-, p-, d-, f- орбиталями молекулярные орбитали обозначают греческими буквами σ-, π-, δ-, γ- . Заполнение же молекулярных орбиталей подчиняется тем же правилам, что и заполнение атомных: принципу энергетической выгодности, принципу Паули, правилу Хунда и правилу Клечковского.

В более крупной молекуле таких уровней, разумеется, больше чем два. При этом последняя занятая электронами молекулярная орбиталь называется **HOMO** (highest occupied molecular orbital), а первая свободная – **LUMO** (lowest unoccupied molecular orbital).



При взаимодействии двух молекул (или молекулы с крупным атомом типа палладия) наиболее благоприятным является взаимодействие между их граничными орбиталями - высшей по энергии их занятых электронами молекулярных орбиталей (HOMO) с низшей по энергии из незанятых молекулярных орбиталей (LUMO).

Например, водород не присоединяется к этилену, так как их LUMO и HOMO попарно не дают положительного перекрывания, но зато легко взаимодействует с металлами VIII группы (например, с палладием), так как LUMO молекулы водорода дает хорошее перекрывание с HOMO палладия (орбиталь dxy).

Переход же электрона из HOMO в возбужденное состояние на вакантную орбиталь в LUMO с более высокой энергией облегчает переход его на другие частицы.

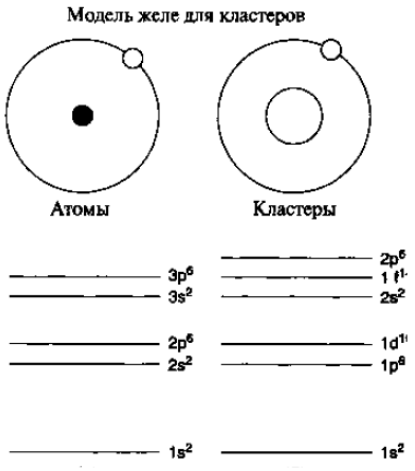
Наночастицы

Маленький кластер (комочек из атомов) аналогичен молекуле с её дискретным набором энергетических уровней. С ростом же числа атомов его электронная структура постепенно приближается к структуре объёмного материала:

В связи с этим в нанокластерной области имеет место даже переход «металл – изолятор»: кластеры из 13 атомов – неметаллические, тогда как кластеры из 309 атомов и более обладают уже выраженными макрометаллическими свойствами

Являясь промежуточным звеном между крупными молекулами и монокристаллами, наночастицы обладают весьма сложной для изучения электронной структурой. Есть несколько действенных подхода к теоретическому описанию этой структуры.

1. **Модель желе.** Кластер атомов рассматривается как один большой атом: положительный заряд ядра каждого его атома считается равномерно распределенным по шару с объемом, равным объему кластера. Таким образом, энергетические уровни кластера могут быть получены путем решения уравнения Шредингера для описанной системы, аналогично тому, как это делается для атома водорода. Электронные магические числа соответствуют полному количеству электронов суператома, при которых его верхний энергетический уровень заполнен до конца.



2. Модель функционалов плотности. Кластеры рассматриваются как молекулы, электронные уровни которых можно рассчитать, используя теорию функционалов. Электрон, вращающийся вокруг ядра каждого атома, рассматривается как волна. А общая

"молекулярная" электронная орбиталь представляется в виде линейной комбинации этих волн, находящихся в суммарном потенциале обособленных ядер атомов кластера. Например, для молекулы H_2:

$$\psi = a\psi(1)_{1s} + b\psi(2)_{1s}$$

и соответственно, уравнение Шрёдингера:

$$\left[\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\right)\nabla^2 - \frac{e^2}{r_a} - \frac{e^2}{r_b}\right]\psi = E\psi$$

Этот подход можно использовать для вычисления реальной геометрической и электронной структуры маленьких металлических кластеров.

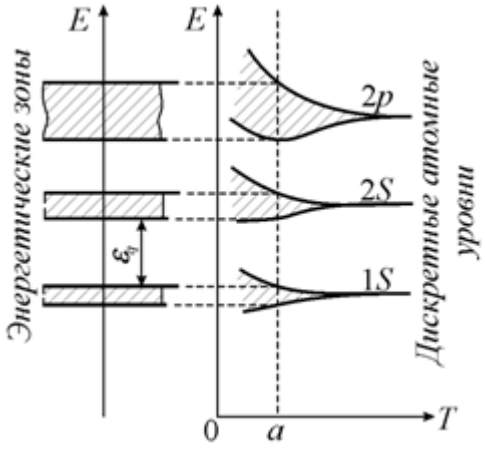
3. Вычислительные методы. Когда молекула-кластер состоит из многих атомов и содержит много электронов, задача становится весьма сложной. Однако, благодаря росту мощности компьютеров и разработке новых теоретических подходов стало возможным определение структуры кластера с наименьшей энергией вычислительными методами с достаточно высокой точностью.

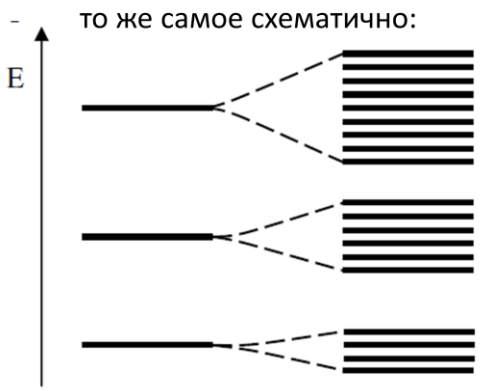
4. Электрон в ящике. Если размеры кластера близки к длине волны его электронов (длина волны де Бройля), их энергетические уровни могут быть получены путем рассмотрения квантовой задачи о частице в потенциальном ящике.

Механизм образования энергетических зон в кристаллах

С увеличением числа взаимодействующих атомов (при переходе к жидкостям и твёрдым телам, т.е. с уменьшением расстояния между атомами ***T***) расщепление отдельных уровней приводит к возникновению **разрешённых зон** (электроны могут иметь значения энергии только лежащие внутри какой-нибудь из этих зон), между которыми располагаются т.н. **запрещённые зоны** (диапазоны энергий, которыми электрон обладать не может).

Если расстояние между атомами остановить на некотором значении а (при кристаллизации атомы останавливаются на расстоянии друг от друга равном постоянной кристаллической решётки).

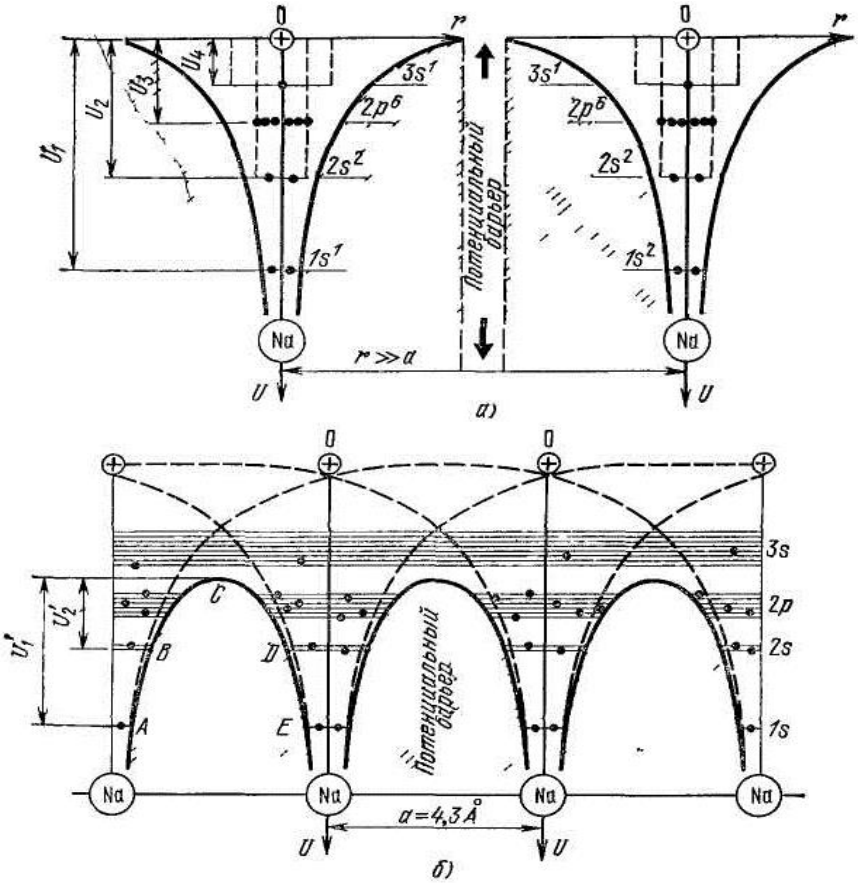




В системе из N атомов, каждый уровень повторяется N раз, поэтому в зоне будет N состояний. У кристалла размером 1см^3 **N≈10^{22}**, расстояние м/у уровнями **ΔE≈10^{-22} эВ**. К слову сказать, ширина нижележащих зон, соответствующих внутренним электронным уровням атомов, меньше из-за меньшего перекрытия орбиталей (т.е. более слабого взаимодействия). Эти оболочки заполнены электронами до конца, так что они не оказывают влияния на электронные свойства материала. Внешние же, или **валентные электроны**, которые и связывают кристалл в единое целое, занимают так называемую **валентную зону**.

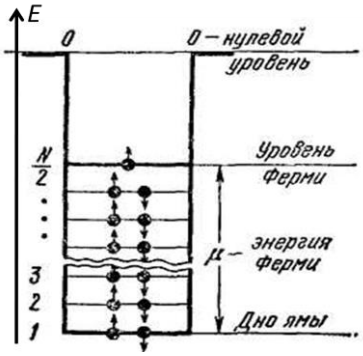
Дном зоны называется самое низкое по энергии состояние в зоне, а **потолком зоны** - самое высокое состояние.

В кристалле расстояния между атомами настолько малы, что потенциальные кривые налагаются друг на друга, образуя **общий периодический потенциал**, а электронные орбитали перекрываются, образуя общее электронное облако, состоящее из **коллективизированных** электронов.

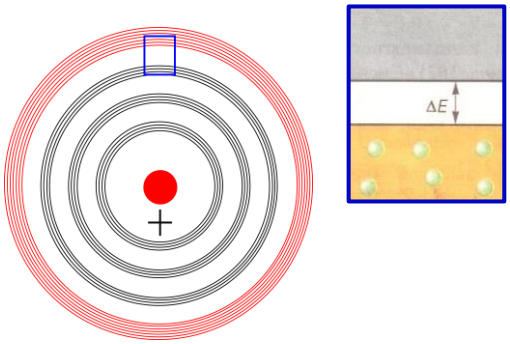


Переходя из валентной зоны в зону повыше, электроны оказываются в псевдосвободном состоянии (орбиталь 3S на рисунке сверху) и могут перемещаться по кристаллу. Такие электроны участвуют в протекании электрических токов и называются **электронами проводимости**, а зона, в которой они двигаются - **зоной проводимости**.

При температуре 0К электроны заполняют уровни в зонной структуре вещества сплошняком, вплоть до некоторого уровня.

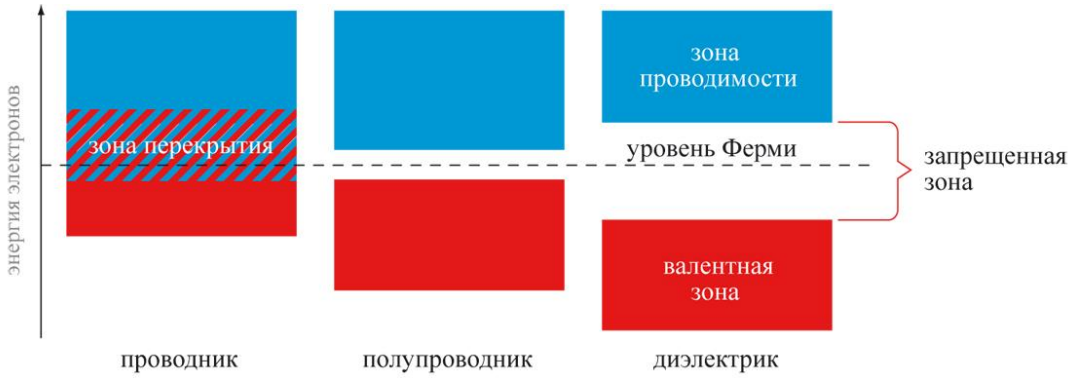


При этом верхняя заполненная зона называется **валентной зоной** (зона, где сидят валентные электроны), а нижняя "пустая" – **зоной проводимости** (зона, где электроны могут путешествовать по кристаллу).



Все твёрдые тела можно разделить на три большие группы.

1. Материалы, у которых зона проводимости и валентная зона перекрываются, образуя единую зону (т.е. уровни так разбухли при коллективизации атомов, что между ними не осталось энергетического зазора и электроны легко переходят из валентного состояния в токопроводящее) являются **проводниками** (электропроводность $\sigma = 10^7$-10^8 Ом$^{-1}$·см$^{-1}$).



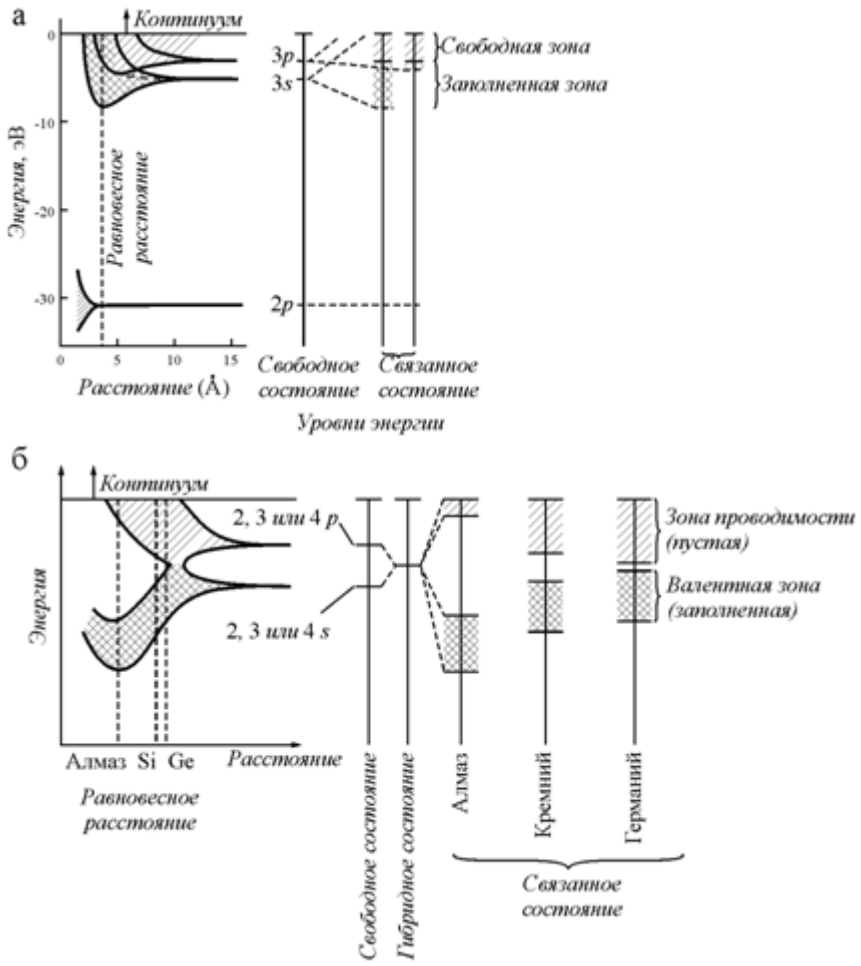
2. Материалы, у которых зоны не перекрываются и расстояние между ними - ширина запрещенной зоны E_g > 3 эВ, называются **диэлектриками**. При этом для того, чтобы перевести электрон из валентной зоны в зону проводимости требуется значительная энергия (намного выше комнатной температуры - k_BT = 0,026 эВ), поэтому диэлектрики ток практически не проводят (электропроводность $\sigma < 10^{-14}$ Ом$^{-1}$·см$^{-1}$).

Примеры: алмаз (C) - 5,2 эВ, нитрид бора (BN) - 4,6 эВ, оксид алюминия (Al_2O_3) - 7 эВ

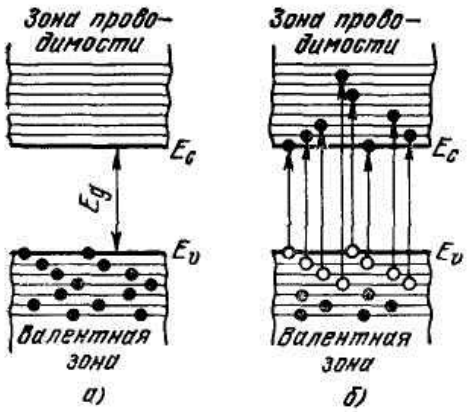
3. Материалы, у которых зоны не перекрываются и расстояние между ними лежит в интервале Eg = 0,1–3 эВ, называются **полупроводниками**. При этом для того, чтобы перевести электрон из валентной зоны в зону проводимости требуется энергия меньшая, чем для диэлектрика: при комнатной температуре уже есть проводимость (на электропроводность такого материала сильно влияет температура и освещение).

Примеры: германий (Ge) - 0,65 эВ, кремний (Si) - 1,08 эВ, арсенид галлия GaAs - 1,4 эВ.

Вот так эти структуры возникают при сближении атомов: а - металл, б - п/п или диэл.



Перепрыгивая вверх через запрещённую зону (например при поглощении фотона), **валентный электрон** становится **электроном проводимости**, а на его месте остаётся т.н. **дырка** (h^+) – отсутствие электрона в химической связи, которое считается положительной квазичастицей и тоже может путешествовать по кристаллу, словно пузырёк в воде.



Обозначения:

$\boldsymbol{E_c}$ – энергия дна зоны проводимости

$\boldsymbol{E_v}$ – энергия потолка валентной зоны

$\boldsymbol{E_g}$ – ширина запрещённой зоны

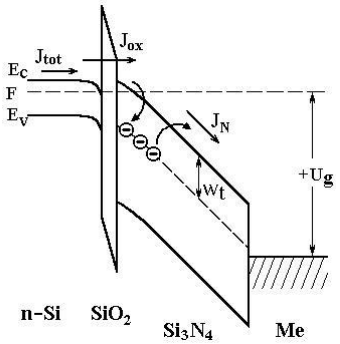
Спрыгивая на одну зону вниз электрон должен попасть на свободное место (в дырку), при этом выделяется энергия (в виде света или тепла), а пара «электрон проводимости - дырка» исчезает. Этот процесс называется **рекомбинацией**.

Наклон энергетических зон

Наклон зон могут вызывать различные причины:

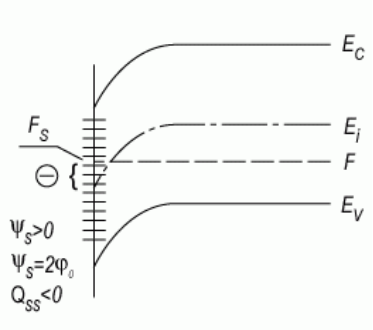
1. внешнее напряжение

Известно, что протекание тока происходит при подаче внешнего электрического напряжения (полюсы "+" и "-"). При этом к уровню энергии электрона добавляется его потенциальная энергия U в этом электрическом поле, которая зависит от расстояния и падает от "+" к "-". Так что зоны (электронные уровни энергии) в результате наклоняются, а электроны бегут НАВСТРЕЧУ наклону (против направления тока).



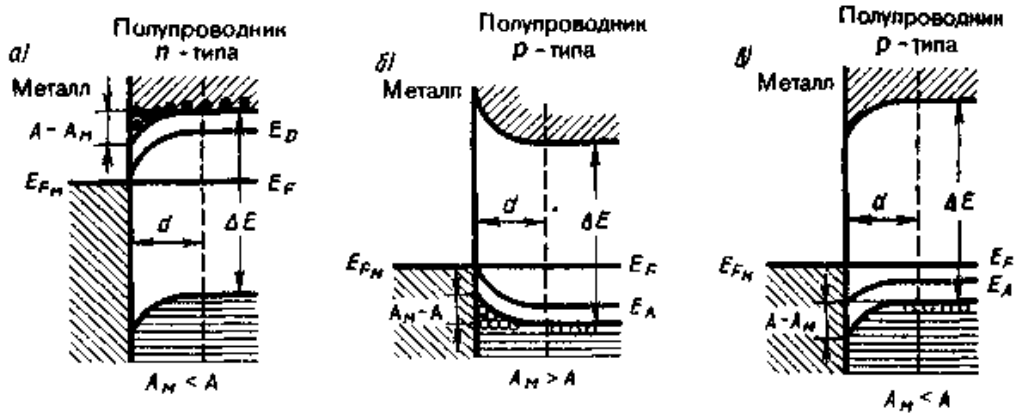
2. поверхностные состояния

Электрические поля могут возникнуть в веществе не только по внешним причинам. На границе вещества могут быть «оборванные» химические связи, которые являются нескомпенсированным электрическим зарядом (т.н. **поверхностные состояния**), который создаёт своё электрическое поле и приводит к приповерхностному изгибу зон.



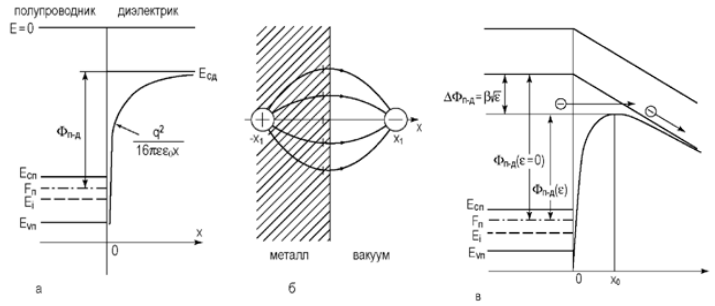
3. контакт двух веществ

По тем же причинам зоны искривляются, если материал имеет контакт с материалом, обладающим другим энергетическим потенциалом (часть электронов перетекает туда, где «жизнь теплее», и создают так называемый **пространственный заряд**, который создаёт своё электрическое поле).



4. силы изображения

Ещё один вариант изгиба уровня – воздействие **сил изображения**: электрон улетая от металла (в вакуум или диэлектрик) оставляет позади нескомпенсированный заряд, который тянет его обратно, создавая опять-таки электрическое поле:



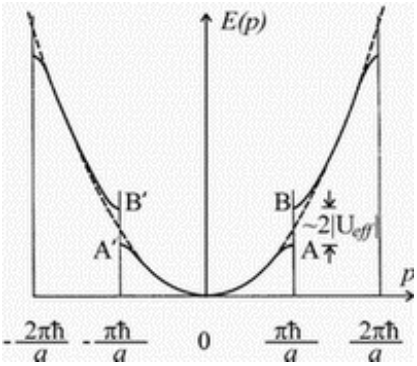
В общем, использование законов квантовой механики и зонных диаграмм позволяет адекватно описывать энергетическое строение электронных состояний в материалах: понимать их электрические и оптические свойства, конструировать многослойные системы с заданными свойствами, производить подбор материалов с нужными параметрами и т.д.

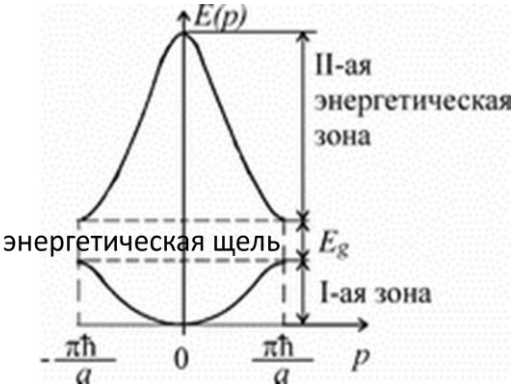
Взаимодействие электронов с решёткой при движении по кристаллу

Двигаясь через кристалл во внешнем электрическом поле, электрон-волна не только ускоряется, но и по ходу интерферирует на межатомных "щелях" кристалла, перпендикулярных направлению его движения (соотв. кристаллографическая плоскость).

Максимальная интенсивность отражённой волны с длиной волны λ в результате такой интерференции будет при **условиях Брэгга-Вульфа**: $2d = n \cdot \lambda$, где d - межатомное расстояние (постоянная решётки), n - целое число > 0.

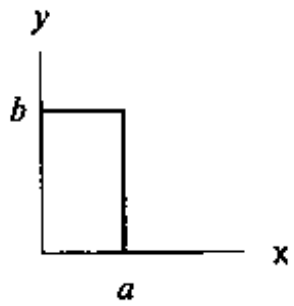
Таким образом, электрон, разгоняясь, как бы "наталкивается" на кристаллические плоскости, и в спектре возможных энергий бегущих по веществу электронов появляются **энергетические щели** (A-B) - запрещённые зоны, которые отделяют возможные зоны (т.н. **зоны Брюллиэна**) друг от друга. Спектр имеет форму параболы, так как $E = p^2/2m$.

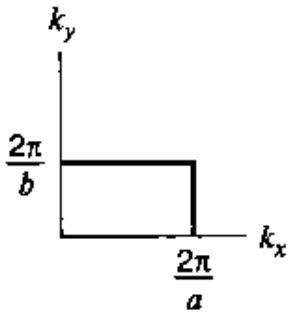


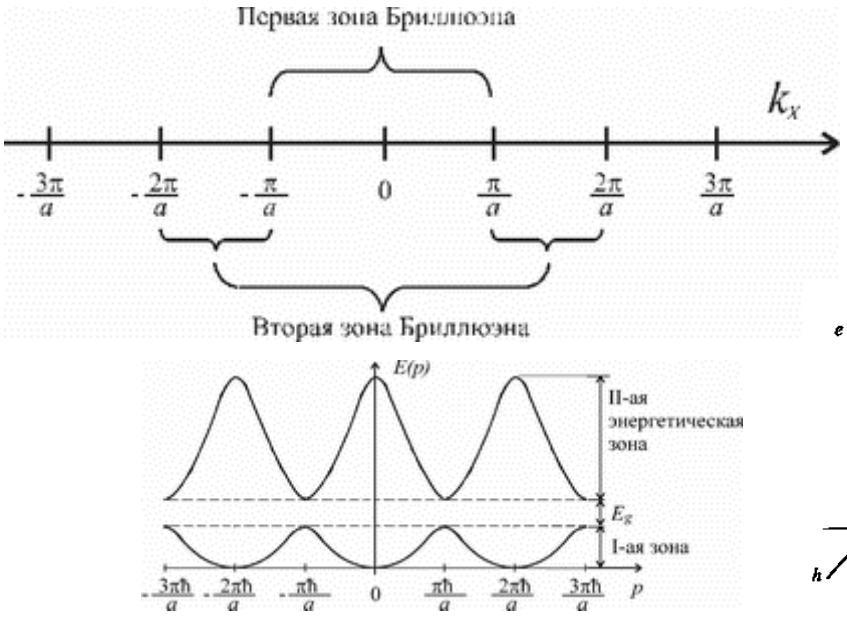


Условие $k = 2\pi/\lambda$ (=> $k = n \cdot \pi/d$) определяет границы **зон Бриллюэна** в **k-пространстве** импульсов ($p = \hbar k$, $k = 2\pi/\lambda$), называемом также **обратным пространством**.

Обычное пространство (метр) «Обратное» пространство (метр$^{-1}$)

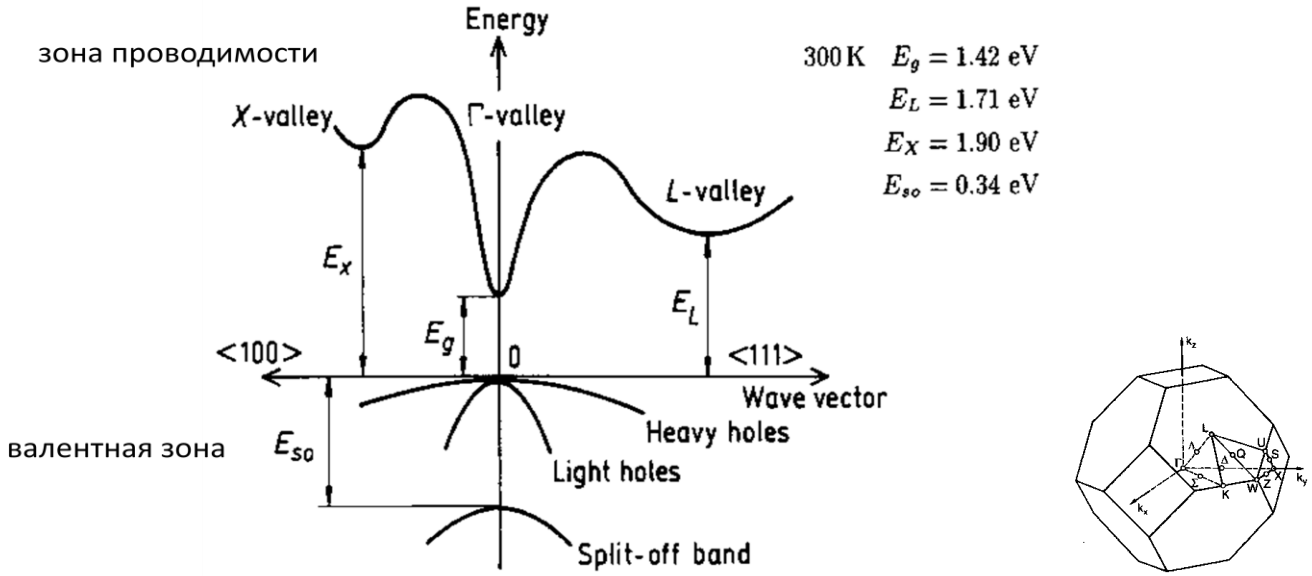






Отметим, что кривые верхних зон круче, чем у нижних, поэтому **эффективная масса** электронов там меньше и они как бы легче, т.е. быстрее разгоняются в электрическом поле.

Зонная структура кристалла GaAs (арсенида галлия) для разных направлений движения электронов в пространстве импульсов, а также его зона Брюллиэна в обратном пространстве:

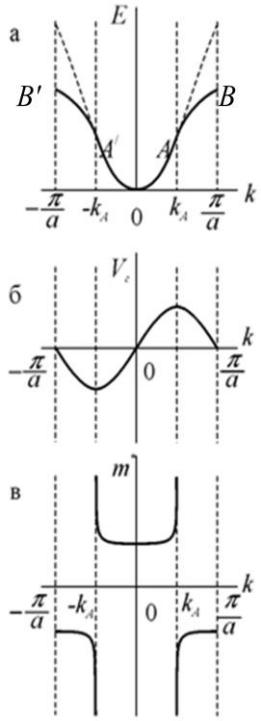


Вещества, у которых максимум одной зоны Брюллиэна не расположен напротив минимума другой, называются **непрямозонными**. В них велика вероятность «невертикальных» переходов электронов из зоны в зону с участием «горизонтальной» энергии **фононов**.

Эффективная масса

В периодическом поле кристалла электрон движется так, как двигался бы свободный электрон с массой m* : $E = p^2/2m^*$. Эта m* – **эффективная масса**. В сущности же, эффективная масса – это «масса» электрона с учётом зависимости энергии от импульса. Исходя из второго закона Ньютона и кое-каких квантово-механических преобразований:

$$m^* = \frac{\hbar^2}{d^2E/dk^2}$$



У свободного электрона $m^* = m$ - масса покоя.

В кристалле же электрон, разгоняясь, меняет своё волновое число k и приближается к точке A - перегиб графика $E(k)$, где $m^* \neq m$.

У границы зоны Брюллиэна, где вторая производная зависимости энергии от скорости равна 0, масса электрона становится равна ∞.

При $k > k_A$ эффективная масса отрицательна $m^* < 0$,

и электрон ускоряется против поля!

В точке B электрон испытывает брэгговское отражение

и появляется уже в точке B', двигаясь на самом деле обратно :)

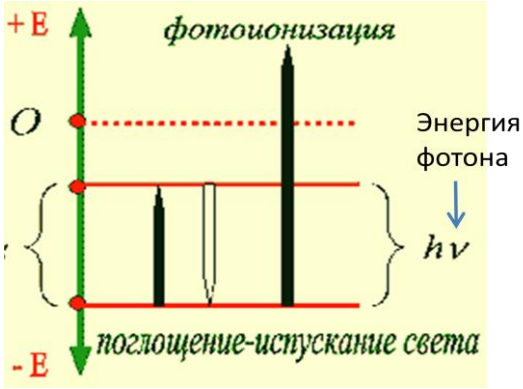
На участке от B' до A' масса падает до -∞.

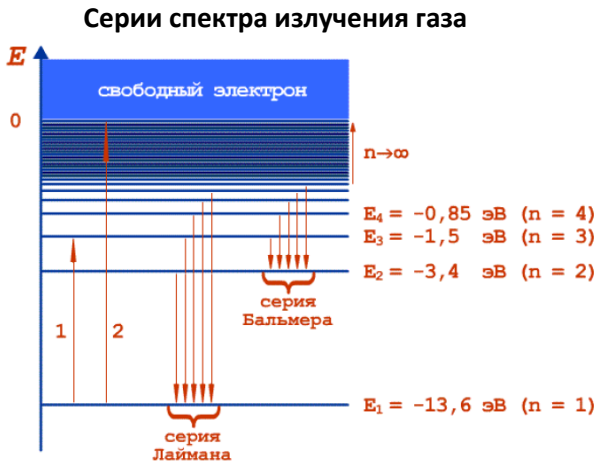
Эффективная масса m* зависит от энергетической зоны: чем зона шире, тем электроны в ней легче. В широкой валентной зоне 3s $m^* \approx m_o$ (масса покоя), в узкой зоне 1s $m^* >> m_o$. **Быстродействие интегральных микросхем** зависит от скорости электронов, поэтому в приложениях, где требуется широкая полоса пропускания, вместо кремния используются п/п с малой m* из группы $A^{III}B^{V}$.

Материал	Эффективная масса электронов	Эффективная масса дырок
	Группа IV	
Si (4.2K)	1.08 m_e	0.56 m_e
Ge	0.55 m_e	0.37 m_e
	III-V	
GaAs	0.067 m_e	0.45 m_e
InSb	0.013 m_e	0.6 m_e
	II-VI	
ZnSe	0.17m_e	1.44 m_e
ZnO	0.19 m_e	1.44 m_e

Спектры оптического поглощения

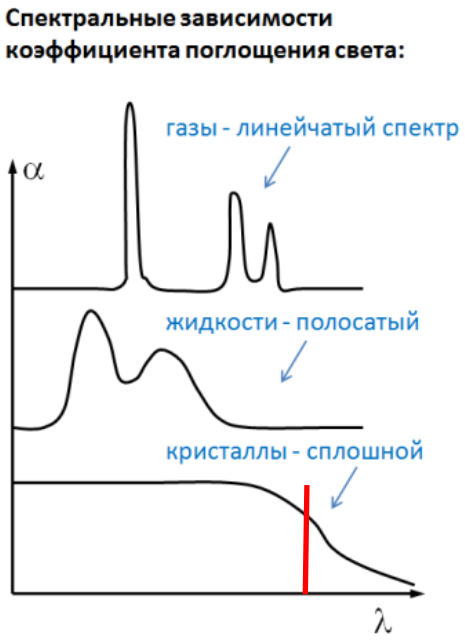
Чтобы подняться на уровень вверх электрон должен поглотить энергию - либо от фотона (электромагнитная волна), либо от теплового колебания решётки (фонон). Спускаясь же, электрон отдаёт энергию опять-таки в виде фотона или фонона.

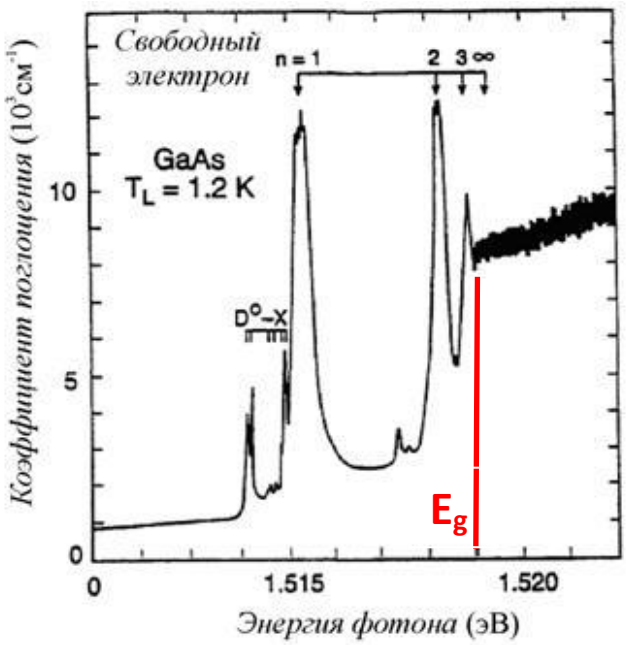




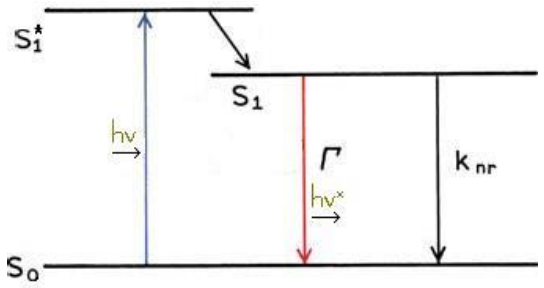
Фотоионизация - выбивание электрона из атома и придание ему положительной энергии. Электрон при этом становится **свободным**, но если он не вылетел из кристалла, тормозное излучение быстренько возвращается его на круги своя.

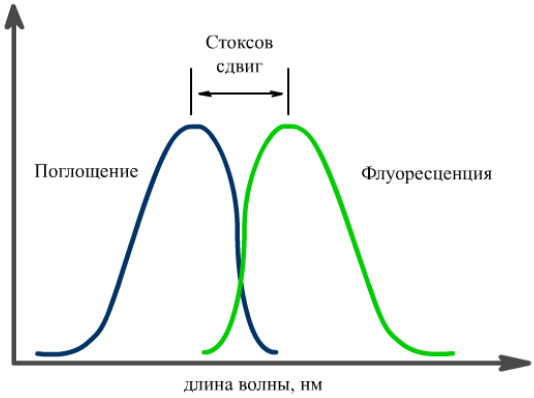
Спектры оптического поглощения атомов, молекул и твёрдых тел существенно отличаются друг от друга, так как у веществ с зонами гораздо шире диапазоны энергий, в которых фотоны ими поглощаются. У газов – линейчатые спектры, у жидкостей полосатые, кристаллы же чаще всего демонстрируют сплошные спектры.





Люминесценция - свечение вещества после поглощения им энергии возбуждения. Подвид - **флуоресценция** - излучение не с того уровня, на который электрон был заброшен.



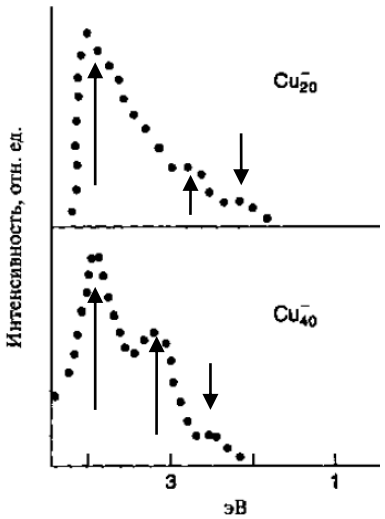


Спектры флуоресценции сдвинуты относительно спектров поглощения (S_0-S_1^*) в сторону длинных волн («Стоксов сдвиг»), так как безызлучательные релаксационные процессы S_1 забирают часть энергии поглощенного фотона, и испускаемый фотон *Г* имеет меньшую энергию (и, соответственно, большую длину волны).

Фосфоресценция - особый тип люминесценции. В отличие от флуоресцентного, фосфоресцентное вещество излучает поглощённую энергию не сразу. Реэмиссия поглощенного излучения проходит с более низкой интенсивностью, и в течение длительного времени (до нескольких часов). Столь большее время реэмиссии связано с «запрещёнными» энергетическими переходами в квантовой механике.

Кристаллы, обладающие способностью к фосфоресценции, называются **кристаллофосфорами**. Возбуждение светом (или электрическим током, или теплом) создаёт в кристалле электроны проводимости. Они могут захватываться ловушками – атомами примесей или оседать на дефектах кристаллической решётки. Таким образом рекомбинация электронов и дырок (а значит, и свечение) наступают спустя достаточно длительное время.

Размер наночастиц определяет их электронную структуру и, соответственно, расстояния между уровнями. Индуцированные светом переходы между этими уровнями определяют цвет материала, в котором эти наночастицы находятся. Таким образом, размер кластера можно использовать при проектировании цвета.



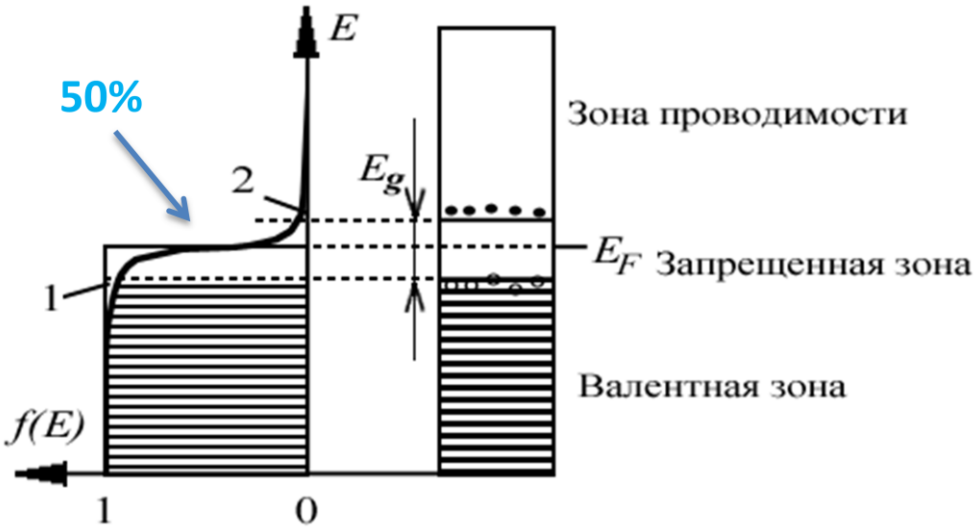
Справа представлены спектры энергии электронов, ВЫБИТЫХ светом УФ из кластеров двух размеров. Самый низкий пик - поглощение света внешним валентным электроном, энергия достаточная для вылета одного верхнего электрона (т.н. **электронное сродство**).

Уровень Ферми

Уровнем Ферми называется энергетический уровень, на котором электрон может располагаться с веротностью $f(E)$ = 50% при условии НЕдискретности спектра, то есть без учёта наличия запрещённых зон!

Энергия Ферми обозначается $\boldsymbol{E_F}$.

Расстояние же до дна зоны, в которой он находится – $\boldsymbol{\mu}$.



При температуре 0К электроны заполняют уровни в зонной структуре вещества сплошняком, вплоть уровня Ферми (под уровнем Ферми вероятность электрона 1, над - 0).

В сущности уровень Ферми является математическим параметром, описывающим распределение электронов по энергетическим уровням в веществе.

Расположение уровня Ферми в зонной структуре, определяет степень заполнения зон электронами, которая в свою очередь определяет свойства вещества, такие как электрическую проводимость, поглощение света и т.д.

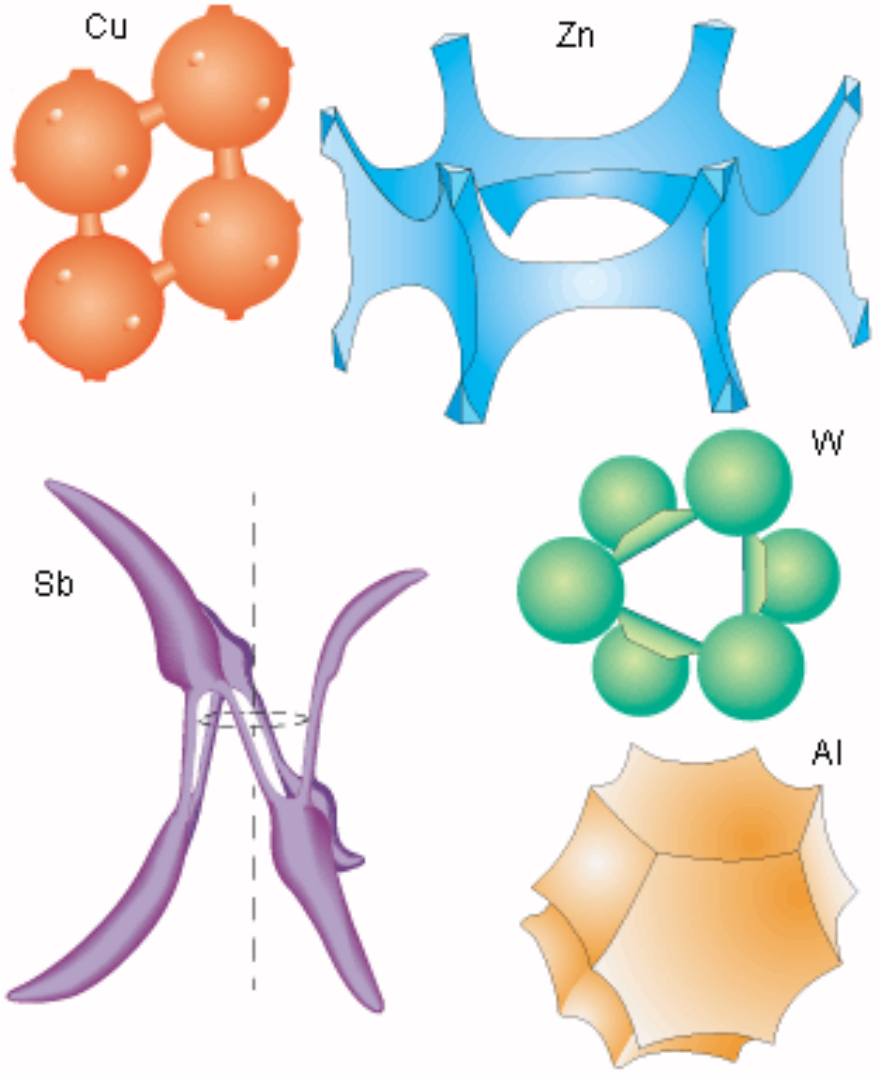
Поверхность Ферми

Поверхность Ферми – фигура в обратном пространстве (пространство импульсов), ограничивающая электроны с кинетическими энергиями ниже уровня Ферми, то есть все валентные и «внутренние» электроны вещества.

при T =0 K все состояния с импульсами: $p < p_F = \sqrt{2mE_F}$ (внутри поверхности) заняты частицами, а с импульсами: $p > p_F = \sqrt{2mE_F}$ (вне поверхности) – свободны.

При нагревании некоторые электроны выходят из этой **«ферми-сферы»** и становятся общими для кристалла, превращаясь в "**электроны проводимости**".

Примеры «ферми-сфер» кристаллов различных веществ:



Вырожденный электронный газ

Классическая механика применима к движению частиц газа, когда расстояния между ними r >> λ_D, где **λ_D – длина волны де Бройля**, отражающая их волновую природу:

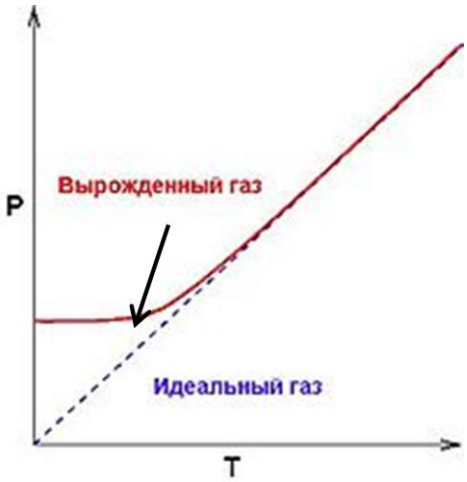
$$\lambda = h/(mv)$$

где h - постоянная Планка, m - масса, v - скорость.

$$h = 4{,}135\ 667\ 516(91) \times 10^{-15}\ \text{эВ·с} \qquad \hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$$

Тепловую скорость электронов можно оценить из МКТ: $mv^2 = 3kT$.

При достаточно низкой температуре (см. график ниже) и высокой концентрации частиц начинает выполняться: r ~ или < λ_D в результате чего электронный газ *вырождается* и приобретает необычные для классической физики свойства, отличные от свойств идеального газа.



Вырожденный газ – это газ, в котором заполнение частицами возможных уровней энергии зависит от наличия на данном уровне других частиц.

Энергетический уровень E называется **вырожденным**, если ему соответствуют несколько РАЗЛИЧНЫХ состояний электрона Ψ, то есть на нём могут быть несколько электронов. Количество таких состояний – **кратность вырождения уровня (g)**.

При комнатной температуре (Т ≈ 300К) газ электронов проводимости в веществе будет невырожденным, если его концентрация значительно меньше 10^{25} м$^{-3}$. Это условие выполняется практически для всех полупроводников, поэтому **в полупроводниках электронный газ**, как правило, не вырожден (концентрация электронов проводимости ~ 10^{13} см$^{-3}$). В зоне проводимости металлов концентрация электронов превышает 10^{22} см$^{-3}$, поэтому **электронный газ металлов** всегда является вырожденным.

Критерии вырожденности электронного газа по уровню Ферми:

1) электронный газ в полупроводнике *n*-типа **не вырожден**, если уровень Ферми лежит **ниже дна зоны** проводимости на *kT*:

$$\boxed{E_C - E_F > kT}$$

2) электронный газ в полупроводнике *n*-типа **сильно вырожден**, если уровень Ферми лежит в зоне проводимости не менее, чем на 5*kT* **выше дна зоны** проводимости:

$$\boxed{E_F - E_C > 5kT}$$

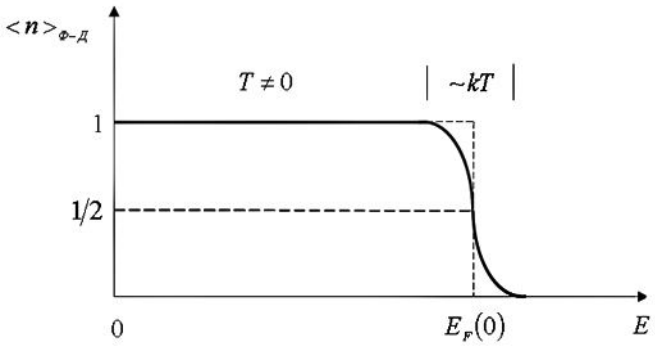
3) в промежуточных случаях, электронный газ **слабо вырожден**:

$$\boxed{-kT < E_F - E_C < 5kT}$$

Статистика Ферми-Дирака

Функция распределения вырожденного электронного газа (вероятность появления электрона на уровне энергии *E* вне зависимости от зонной структуры) зависит от температуры и подчиняется **статистике Ферми-Дирака**:

$$\langle n \rangle_{\text{Ф-Д}}(E) = \frac{g}{e^{(E-E_F)/kT}+1}$$

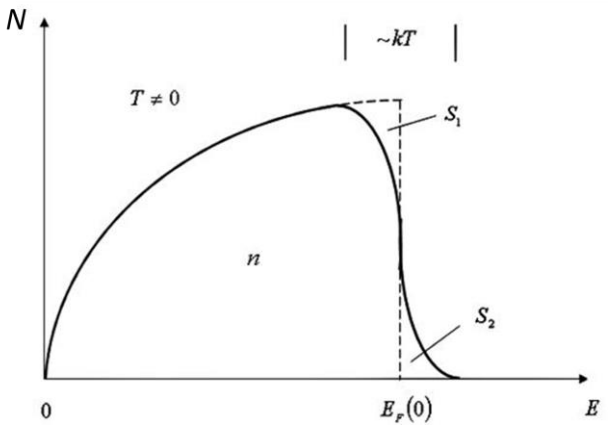


здесь $<n>_{\text{Ф-Д}}$ – среднее число частиц с энергией *E*,
g − кратность вырождения (g = 1 на рис. справа).

Учтём **плотность состояний** в зонной структуре $\rho_{эл}(E)$ – число состояний, приходящихся на единичный интервал энергий. Для электронов:

$$\rho_{эл}(E) \propto \sqrt{E}$$

Умножив функцию распределения $<n>(E)$ на $\rho_{эл}(E)$ получим **полную функцию распределения** электронов по энергиям $N = dn/dE = <n>(E) \cdot \rho_{эл}(E)$, т.е. число электронов, приходящихся на единичный интервал энергии:



Статистика Бозе-Эйнштейна

С точки зрения квантовой теории равновесное тепловое излучение в кристалле рассматривается как газ квантов света – **фотонов** ($E = h\nu$, спиновое число $s = 1$).

Колебания атомов в кристаллической решётке с определёнными частотами могут распространяться по кристаллу без затухания. Квант энергии таких тепловых колебаний называется **фононом** ($E = h\nu$, $s = 0$).

Частицы с целым спином называются **бозонами**,

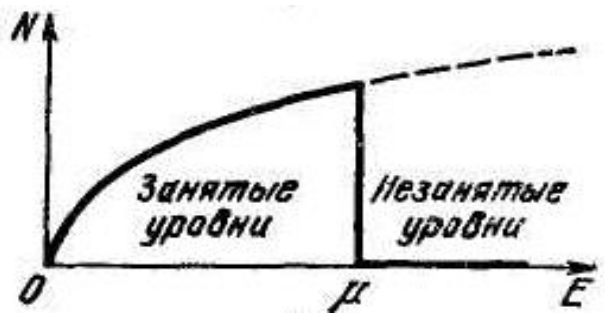
с полуцелым называются **фермионами**.

Фермионы	Кварки	u · d · c · s · t · b
	Лептоны	e^- · e^+ · μ^- · μ^+ · τ^- · τ^+ · ν_e · $\bar{\nu}_e$ · ν_μ · $\bar{\nu}_\mu$ · ν_τ · $\bar{\nu}_\tau$
Бозоны	Калибровочные бозоны	γ · g · W-бозон · Z-бозон
	бозоны Хиггса	H^0
Другие	Ду́хи	

К фермионам применяется статистика Ферми-Дирака (см. ранее), к бозонам же применяется **статистика Бозе-Эйнштейна**:

$$\langle n \rangle_{\text{Б-Э}}(E) = \frac{g}{e^{(E-E_F)/kT} - 1}$$

Умножая на плотность состояний в кристалле, получаем **полную функцию распределения** :

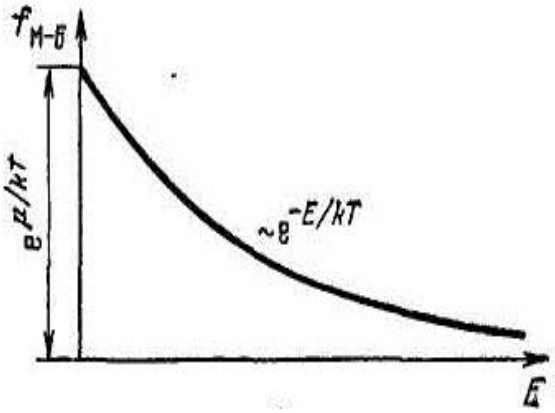


Газ, в котором все бозоны находятся на нижнем энергетическом уровне системы (не возбуждены) называется **Бозе-конденсатом**.

Статистика Максвелла-Больцмана

При высоких температурах T и низких концентрациях, когда $\langle n \rangle(E) \ll 1$, газ перестаёт быть вырожденным и статистики Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна превращаются в **распределение Максвелла-Больцмана**:

$$\langle n \rangle_{\text{М-Б}}(E) = \frac{1}{e^{(E-E_{хим})/kT}}$$

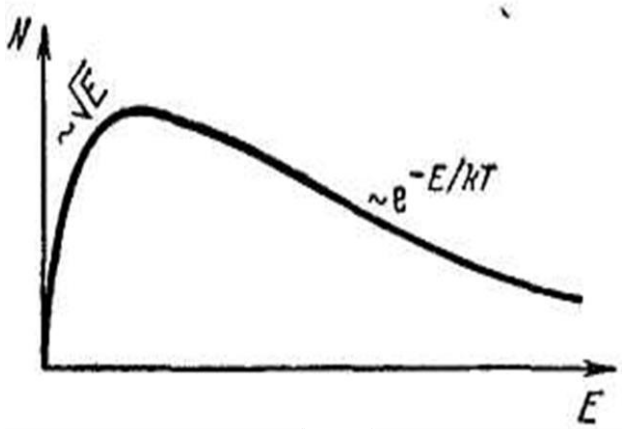


где вместо энергии Ферми E_F появляется $E_{хим}$ – **химический потенциал** – энергия добавления одной частицы в систему без совершения работы.

Для свободного ферми-газа имеется связь между хим. потенциалом и энергией ферми:

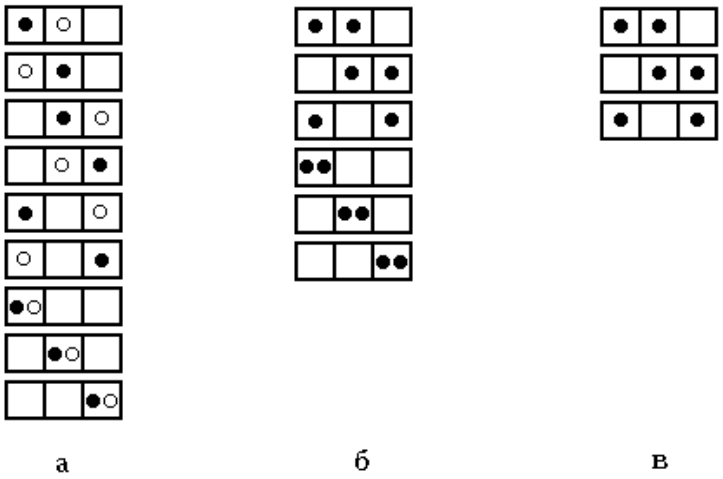
$$E_{хим} = E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 + \frac{\pi^4}{80} \left(\frac{kT}{E_F} \right)^4 + \ldots \right]$$

Для фермионов $\rho_{эл}(E) \propto \sqrt{E}$, поэтому полная функция распределения выглядит так:



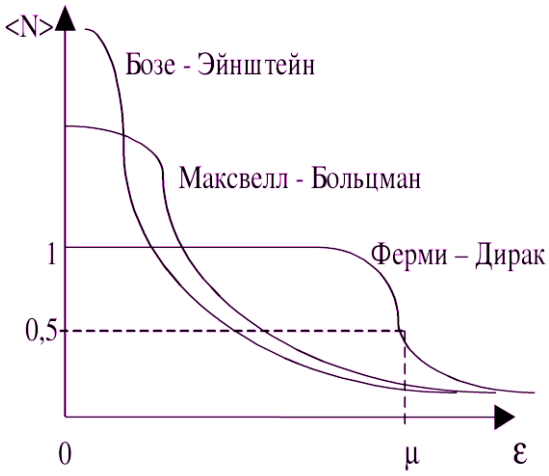
Принципиальное различие трёх статистик

Все возможные способы распределения двух частиц по трем состояниям (Ψ1, Ψ2, Ψ3):



а) классическая статистика Максвелла-Больцмана. Частицы различимы и обозначены разным цветом. Всего девять микросостояний, вероятность каждого 1/9.
б) квантовая статистика Бозе-Эйнштейна. Частицы-бозоны неразличимы. Число микросостояний шесть, вероятность каждого 1/6.
в) квантовая статистика Ферми-Дирака. Частицы-фермионы неразличимы, а количество частиц в одном состоянии не может превышать 1. Остаются только три микросостояния, вероятность каждого 1/3.

Плавное превращение функций распределения друг в друга:



Басня про Людей:

В начале двадцатого века один шотландский фермер возвращался домой и проходил по болотистой местности. Вдруг он услышал крики о помощи. Прибежав на крик, он увидел мальчика, которого засасывала болотная жижа. Фермер быстро срубил толстый сук и вытащил мальчика.
— Пойдем ко мне в дом, — предложил ему фермер. — Тебе надо успокоиться, высушиться и согреться.
— Нет-нет, — мальчик покачал головой, — меня папа ждет. Он очень волнуется, куда я пропал.
И мальчик убежал.
Утром, фермер увидел, что к его дому подъехала богатая карета, запряженная роскошными породистыми скакунами. Из кареты вышел богато одетый джентльмен и спросил:
— Это вы вчера спасли жизнь моему сыну?
— Да, я, — ответил фермер.
— Сколько я вам должен?
— Не обижайте меня, господин. Вы мне ничего не должны. Я поступил так, как должен был поступить нормальный человек.
— Нет, я не могу оставить это просто так, потому что мой сын мне очень дорог. Назовите любую сумму, — настаивал посетитель.
— Я больше ничего не хочу говорить на эту тему. До свидания.
Фермер повернулся, чтобы уйти. И тут на крыльцо выскочил его сынишка.
— Это ваш сын? — спросил богатый гость.
— Да, — с гордостью ответил фермер, поглаживая мальчика по головке.
— Давайте сделаем так. Я возьму вашего сына с собой в Лондон и оплачу его образование. Если он так же благороден, как и его отец, то ни вы, ни я не будем жалеть об этом решении.
Прошло несколько лет. Сын фермера закончил школу, потом — медицинский университет, и вскоре его имя стало всемирно известно, как имя человека, открывшего пенициллин. Его звали Александр Флемминг.
Перед самой войной в одну из богатых Лондонских клиник поступил с тяжелейшей формой воспаления легких сын того самого джентльмена. Как вы думаете, что спасло его жизнь в этот раз?
Да, пенициллин, открытый Александром Флеммингом.
Имя богатого джентльмена, давшего образование Флеммингу, было Рандольф Черчилль. А его сына звали Уинстон Черчилль, который впоследствии стал премьер-министром Англии.
Уинстон Черчилль как-то сказал: «Сделанное тобой к тебе же и вернется».